Identità miste ed il Lemma di Neumann

Paolo Marimon
in collaborazione con Michael Pinsker

Università di Torino

Back & Forth Lectures, 22 Aprile 2026

Finanziato dall' UKRI ERC Guarantee Grant New Approaches to Approximability of Satisfiable Problems.

Siete familiari con i seguenti concetti di teoria dei gruppi?
gruppo, gruppo di permutazioni, orbita, stabilizzatore

▸ Clicca qui per le definizioni di base

Identità miste

G, un gruppo.

Possiamo scrivere "parole" con variabili e costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots \in G$:

$$x\gamma x^{-1}\gamma^{-1}, \qquad x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1, \qquad x^2$$

Una parola è una **identità mista** se in qualsiasi sostutuzione delle variabili con elementi di G otteniamo 1:

$$\forall x\,(x\gamma x^{-1}\gamma^{-1} = 1), \qquad \forall x_1, x_2\,(x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1 = 1), \qquad \forall x\,(x^2 = 1)\,.$$

Indentità miste sono un modo di parlare della struttura di G.

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.

Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Identità miste

G, un gruppo.
Possiamo scrivere "parole" con variabili e costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots \in G$:

$$x\gamma x^{-1}\gamma^{-1}, \qquad x_2\gamma_2 x_2 \gamma_1 x_1, \qquad x^2$$

Una parola è una **identità mista** se in qualsiasi sostutuzione delle variabili con elementi di G otteniamo 1:

$$\forall x\,(x\gamma x^{-1}\gamma^{-1} = 1), \qquad \forall x_1, x_2\,(x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1 = 1), \qquad \forall x\,(x^2 = 1)\,.$$

- Indentità miste sono un modo di parlare della struttura di G.

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \le n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Identità miste

G, un gruppo.
Possiamo scrivere "parole" con variabili e costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots \in G$:

$$x\gamma x^{-1}\gamma^{-1}, \qquad x_2\gamma_2 x_2 \gamma_1 x_1, \qquad x^2$$

Una parola è una **identità mista** se in qualsiasi sostutuzione delle variabili con elementi di G otteniamo 1:

$$\forall x\,(x\gamma x^{-1}\gamma^{-1} = 1), \qquad \forall x_1, x_2\,(x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1 = 1), \qquad \forall x\,(x^2 = 1)\,.$$

- Indentità miste sono un modo di parlare della struttura di G.

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Identità miste

G, un gruppo.
Possiamo scrivere "parole" con variabili e costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots \in G$:

$$x\gamma x^{-1}\gamma^{-1}, \qquad x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1, \qquad x^2$$

Una parola è una **identità mista** se in qualsiasi sostutuzione delle variabili con elementi di G otteniamo 1:

$$\forall x\,(x\gamma x^{-1}\gamma^{-1} = 1), \qquad \forall x_1, x_2\,(x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1 = 1), \qquad \forall x\,(x^2 = 1)\ .$$

- Indentità miste sono un modo di parlare della struttura di G.

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Identità miste

G, un gruppo.
Possiamo scrivere "parole" con variabili e costanti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots \in G$:

$$x\gamma x^{-1}\gamma^{-1}, \qquad x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1, \qquad x^2$$

Una parola è una **identità mista** se in qualsiasi sostutuzione delle variabili con elementi di G otteniamo 1:

$$\forall x\, (x\gamma x^{-1}\gamma^{-1} = 1), \qquad \forall x_1, x_2\, (x_2\gamma_2 x_2\gamma_1 x_1 = 1), \qquad \forall x\, (x^2 = 1)\ .$$

- Indentità miste sono un modo di parlare della struttura di G.

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Identità miste

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \ldots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \ldots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \ldots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \ldots, x_r) = 1$.

Diciamo che w è **singolare** se "dimenticandoci le costanti" e riducendo otteniamo 1:

$$y^{-1} x \gamma_2 x^{-1} \gamma_1 y \xmapsto[\text{le costanti}]{\text{dimentica}} y^{-1} x x^{-1} y \mapsto y^{-1} y \mapsto 1 \; .$$

Identità miste

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \ldots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \ldots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \ldots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \ldots, x_r) = 1$.

Diciamo che w è **singolare** se "dimenticandoci le costanti" e riducendo otteniamo 1:

$$y^{-1} x \gamma_2 x^{-1} \gamma_1 y \xmapsto[\text{le costanti}]{\text{dimentica}} y^{-1} x x^{-1} y \mapsto y^{-1} y \mapsto 1\ .$$

Identità miste

Definizione (Identità mista)

Una **parola con costanti** w in r variabili è

$$w(x_1, \dots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \dots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0$$

dove per $i \leq n$, $\gamma_i \in G$, $\epsilon(i) \in \{-1, 1\}$, e $\iota(i) \in \{1, \dots, r\}$.
Diciamo che w è una **identità mista** se $\forall x_1 \cdots \forall x_r w(x_1, \dots, x_r) = 1$.

Diciamo che w è **singolare** se "dimenticandoci le costanti" e riducendo otteniamo 1:

$$y^{-1} x \gamma_2 x^{-1} \gamma_1 y \xmapsto[\text{le costanti}]{\text{dimentica}} y^{-1} x x^{-1} y \mapsto y^{-1} y \mapsto 1 \ .$$

Le parole singolari sono "vicine" all'identità.

Gruppi oligomorfi

Definizione

Una struttura $\mathbb{A}$ (infinita ed enumerabile) è **$\aleph_0$-categorica** se ogni due modelli enumerabili della sua teoria sono isomorfi.

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$.

Gruppi oligomorfi

Definizione

Una struttura $\mathbb{A}$ (infinita ed enumerabile) è **$\aleph_0$-categorica** se ogni due modelli enumerabili della sua teoria sono isomorfi.

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$*.*

Gruppi oligomorfi

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$*.*

Esempi (di gruppi oligomorfi)

- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) := \mathrm{Aut}(\mathbb{N}; =)$;
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$;
- $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$;
- $\mathrm{Aut}(R)$ dove R è il grafo random.

Gruppi oligomorfi

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$*.*

Esempi (di gruppi oligomorfi)

- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) := \mathrm{Aut}(\mathbb{N}; =)$;
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$;
- $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$;
- $\mathrm{Aut}(R)$ dove R è il grafo random.

Gruppi oligomorfi

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$.

Esempi (di gruppi oligomorfi)

- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) := \mathrm{Aut}(\mathbb{N}; =)$;
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$;
- $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$;
- $\mathrm{Aut}(R)$ dove R è il grafo random.

Gruppi oligomorfi

Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- $\mathbb{A}$ *è* $\aleph_0$*-categorica;*
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ *è* ***oligomorfo****:*
  per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) \curvearrowright \mathbb{A}^n$ *ha un numero di orbite finite nella sua azione* $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (g \cdot a_1, \ldots, g \cdot a_n)$.

Esempi (di gruppi oligomorfi)

- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) := \mathrm{Aut}(\mathbb{N}; =)$;
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$;
- $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$;
- $\mathrm{Aut}(R)$ dove R è il grafo random.

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Un po' di risultati per G oligomorfo:

- Macpherson 1986:* G non ha identità miste *senza costanti*;
- Hull e Osin 2016; Bodirsky, Schneider e Thom 2025: tutte le identità miste di $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ sono singolari;
- Bradford, Schneider e Thom 2023: tutte le identità miste di $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ sono singolari;
- Bodirsky, Schneider e Thom 2025; Ghadernezhad e De La Nuez González 2024: $\mathrm{Aut}(R)$ (dove R è il grafo random) non ha identità miste.

Congettura (Bodirsky, Schneider e Thom 2025)

Tutte le identità miste di un gruppo oligomorfo sono singolari.

*Melles e Shelah 1994 generalizzano per $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ dove $\mathbb{A}$ è saturato.

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Un po' di risultati per G oligomorfo:

- Macpherson 1986:* G non ha identità miste *senza costanti*;
- Hull e Osin 2016; Bodirsky, Schneider e Thom 2025: tutte le identità miste di $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ sono singolari;
- Bradford, Schneider e Thom 2023: tutte le identità miste di $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ sono singolari;
- Bodirsky, Schneider e Thom 2025; Ghadernezhad e De La Nuez González 2024: $\mathrm{Aut}(R)$ (dove R è il grafo random) non ha identità miste.

Congettura (Bodirsky, Schneider e Thom 2025)

Tutte le identità miste di un gruppo oligomorfo sono singolari.

*Melles e Shelah 1994 generalizzano per $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ dove $\mathbb{A}$ è saturato.

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Un po' di risultati per G oligomorfo:

- Macpherson 1986:* G non ha identità miste *senza costanti*;
- Hull e Osin 2016; Bodirsky, Schneider e Thom 2025: tutte le identità miste di $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ sono singolari;
- Bradford, Schneider e Thom 2023: tutte le identità miste di $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ sono singolari;
- Bodirsky, Schneider e Thom 2025; Ghadernezhad e De La Nuez González 2024: $\mathrm{Aut}(R)$ (dove R è il grafo random) non ha identità miste.

Congettura (Bodirsky, Schneider e Thom 2025)

Tutte le identità miste di un gruppo oligomorfo sono singolari.

*Melles e Shelah 1994 generalizzano per $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ dove $\mathbb{A}$ è saturato.

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Un po' di risultati per G oligomorfo:

- Macpherson 1986:* G non ha identità miste *senza costanti*;
- Hull e Osin 2016; Bodirsky, Schneider e Thom 2025: tutte le identità miste di $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ sono singolari;
- Bradford, Schneider e Thom 2023: tutte le identità miste di $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ sono singolari;
- Bodirsky, Schneider e Thom 2025; Ghadernezhad e De La Nuez González 2024: $\mathrm{Aut}(R)$ (dove R è il grafo random) non ha identità miste.

Congettura (Bodirsky, Schneider e Thom 2025)

Tutte le identità miste di un gruppo oligomorfo sono singolari.

*Melles e Shelah 1994 generalizzano per $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ dove $\mathbb{A}$ è saturato.

Identità miste in gruppi oligomorfi

- Le strutture $\aleph_0$-categoriche hanno molte simmetrie;
- Ci dovremmo aspettare poche identità miste!

Un po' di risultati per G oligomorfo:

- Macpherson 1986: G non ha identità miste *senza costanti*;
- Hull e Osin 2016; Bodirsky, Schneider e Thom 2025: tutte le identità miste di $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ sono singolari;
- Bradford, Schneider e Thom 2023: tutte le identità miste di $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ sono singolari;
- Bodirsky, Schneider e Thom 2025; Ghadernezhad e De La Nuez González 2024: $\mathrm{Aut}(R)$ (dove R è il grafo random) non ha identità miste.

Congettura (Bodirsky, Schneider e Thom 2025)

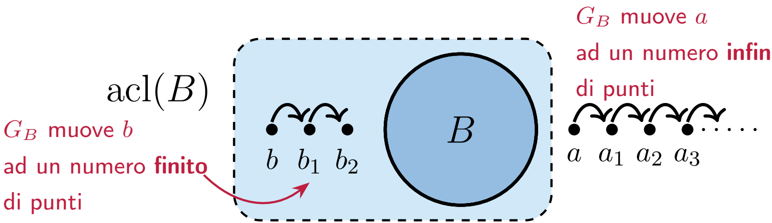
Tutte le identità miste di un gruppo oligomorfo sono singolari.*

*Sappiamo che $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ e $\mathrm{GL}(\aleph_0, q)$ hanno identità miste singolari.

Chiusura algebrica ed il Lemma di Neumann

Definizione (Chiusura algebrica)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $B \subseteq \Omega$ finito.
La **chiusura algebrica** di B, $\mathrm{acl}(B)$ è l'insieme di elementi di Ω che hanno orbita finita nell'azione di G_B (lo stabilizzatore di B).



Chiusura algebrica ed il Lemma di Neumann

Definizione (Chiusura algebrica)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $B \subseteq \Omega$ finito.
La **chiusura algebrica** di B, $\mathrm{acl}(B)$ è l'insieme di elementi di Ω che hanno orbita finita nell'azione di G_B (lo stabilizzatore di B).

Esempi

- acl in $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$ è la chiusura lineare;
- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \curvearrowright \mathbb{N}$ ed $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <) \curvearrowright \mathbb{Q}$ sono **senza algebraicità**:
$$\mathrm{acl}(B) = B \quad \text{per ogni } B\ ;$$
- Per $G \curvearrowright \Omega$ oligomorfo, acl è **localmente finita**:
per B finito, $\mathrm{acl}(B)$ è finita.

Chiusura algebrica ed il Lemma di Neumann

Definizione (Chiusura algebrica)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $B \subseteq \Omega$ finito.
La **chiusura algebrica** di B, $\mathrm{acl}(B)$ è l'insieme di elementi di Ω che hanno orbita finita nell'azione di G_B (lo stabilizzatore di B).

Esempi

- acl in $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$ è la chiusura lineare;
- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \curvearrowright \mathbb{N}$ ed $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <) \curvearrowright \mathbb{Q}$ sono **senza algebraicità**:
$$\mathrm{acl}(B) = B \text{ per ogni } B \,;$$
- Per $G \curvearrowright \Omega$ oligomorfo, acl è **localmente finita**: per B finito, $\mathrm{acl}(B)$ è finita.

Chiusura algebrica ed il Lemma di Neumann

Definizione (Chiusura algebrica)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $B \subseteq \Omega$ finito.
La **chiusura algebrica** di B, $\mathrm{acl}(B)$ è l'insieme di elementi di Ω che hanno orbita finita nell'azione di G_B (lo stabilizzatore di B).

Esempi

- acl in $\mathrm{GL}(\aleph_0, q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^{\aleph_0})$ è la chiusura lineare;
- $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \curvearrowright \mathbb{N}$ ed $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <) \curvearrowright \mathbb{Q}$ sono **senza algebraicità**:
$$\mathrm{acl}(B) = B \text{ per ogni } B\ ;$$
- Per $G \curvearrowright \Omega$ oligomorfo, acl è **localmente finita**:
per B finito, $\mathrm{acl}(B)$ è finita.

Chiusura algebrica ed il Lemma di Neumann

Definizione (Chiusura algebrica)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $B \subseteq \Omega$ finito.
La **chiusura algebrica** di B, $\mathrm{acl}(B)$ è l'insieme di elementi di Ω che hanno orbita finita nell'azione di G_B (lo stabilizzatore di B).

Lemma (Π. N. Neumann 1976)

$G \curvearrowright \Omega$ (per Ω infinito). $A, B \subseteq \Omega$ finiti con $A \cap \mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$.
Allora, esiste $g \in G$ tale che $(g \cdot A) \cap B = \emptyset$.

- In un contesto infinito spesso abbiamo spazio per spostare insiemi finiti.

Risultati

Teorema (MP 2026)

Sia $G \curvearrowright \Omega$ (Ω infinito) senza algebraicità.
Allora ogni identità mista di G è singolare.

Risultati

Teorema (MP 2026)

Sia $G \curvearrowright \Omega$ (Ω infinito) senza algebraicità.
Allora ogni identità mista di G è singolare.

Esempi ($G \curvearrowright \Omega$ senza algebraicità)

- vari gruppi oligomorfi: $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}), \mathrm{Aut}(R), \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$;
- gruppi di omeomorfismi di: $2^{\aleph_0}$ (spazio di Cantor), $[0,1]^{\aleph_0}$ (cubo di Hilbert), varietà (manifold) di dimensione ≥ 1.

L'idea[†]

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a_1', \ldots, a_n, a_n', a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a_1', \ldots, a_n') \ .$$

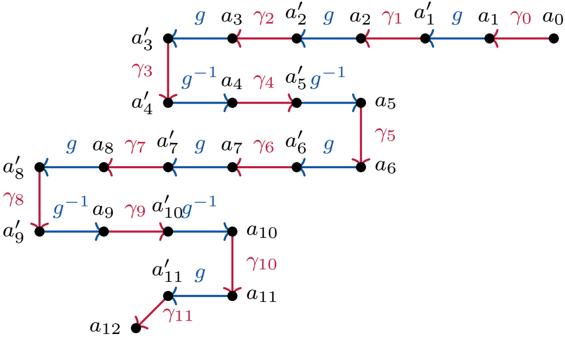
[†] Guardiamo al caso in cui w ha una sola variabile.

L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \ .$$

$$w(x) = \gamma_{11} x \gamma_{10} x^{-1} \gamma_9 x^{-1} \gamma_8 x \gamma_7 x \gamma_6 x \gamma_5 x^{-1} \gamma_4 x^{-1} \gamma_3 x \gamma_2 x \gamma_1 x \gamma_0$$

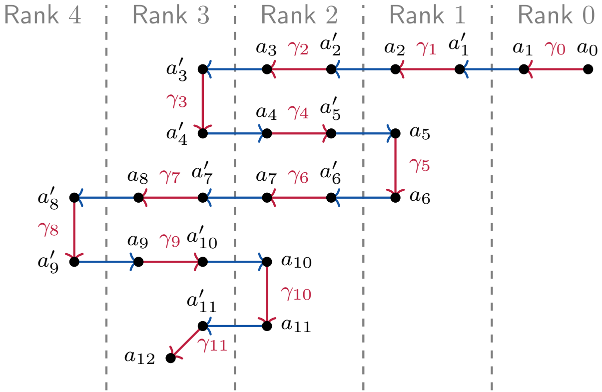


L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \ .$$

Diamo un rank agli elementi a seconda della loro posizione.

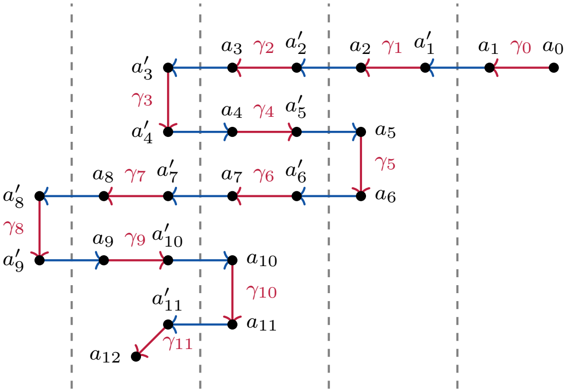


L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a_1', \dots, a_n, a_n', a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \dots, a_n) = (a_1', \dots, a_n') \ .$$

Vogliamo g tale che insiemi di rank diversi siano indipendenti fra di loro!

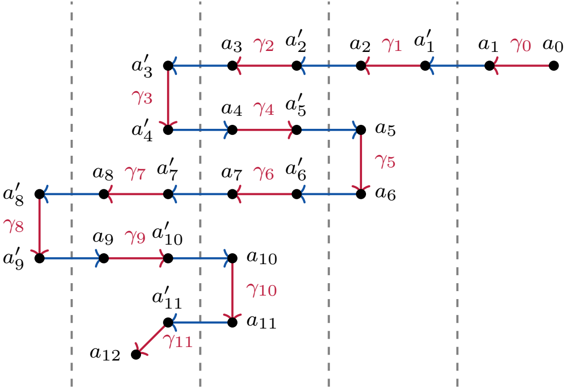


L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a_1', \ldots, a_n, a_n', a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a_1', \ldots, a_n') \ .$$

Non possiamo garantire che elementi dello stesso rank siano indipendenti!

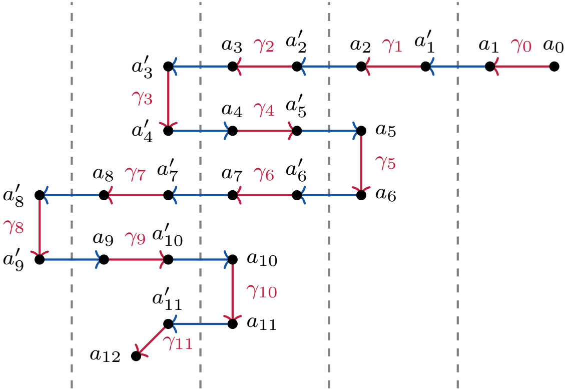


L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a_1', \dots, a_n, a_n', a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \dots, a_n) = (a_1', \dots, a_n') \ .$$

Usiamo il Lemma di Neumann per garantire queste condizioni di indipendenza (guardando avanti!)

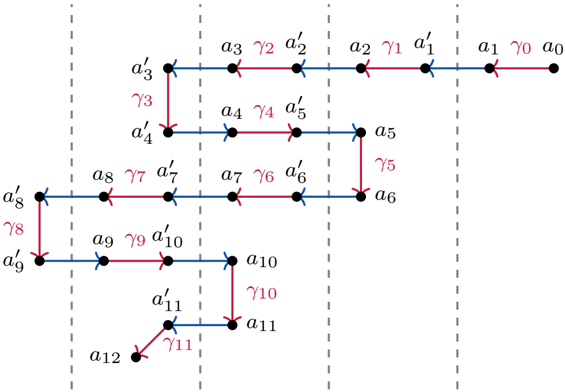


L'idea

Dato $g \in G$ per $a_0 \in \Omega$, le immagini di a_0 rispetto a sottoparole di w formano una sequenza $(a_0, a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, a_{n+1})$ con

$$g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \ .$$

La prova procede per induzione:
la sfida maggiore è bilanciare l'ipotesi induttiva correttamente.



Grazie mille!

Recap:

- Il Lemma di Neumann ci permette di distanziare insiemi (quando questi non sono legati da elementi algebrici);
- Questo ci permette di dimostrare:
  $G \curvearrowright \Omega$ senza algebraicità $\Rightarrow$ le identità miste di G sono singolari;
- Altri risultati

Lezioni di Neumann su gruppi di permutazione infiniti:

Consiglio anche il libro di Peter Cameron: "Oligomorphic Permutation Groups".

Bibliografia I

Bodirsky, Manuel, Jakob Schneider e Andreas Thom (2025). "Mixed identities for oligomorphic automorphism groups". In: *The Journal of Symbolic Logic*, pp. 1–23.

Bradford, Henry, Jakob Schneider e Andreas Thom (2023). "Non-singular word maps for linear groups". In: *arXiv preprint arXiv:2311.03981*.

De la Nuez Gonzalez, J., Zaniar Ghadernezhad, Paolo Marimon e Michael Pinsker (2026). *Minimal and intrinsic topologies on monoids of elementary embeddings*. arXiv: 2603.28419.

Ghadernezhad, Zaniar e Javier De La Nuez González (2024). "Group topologies on automorphism groups of homogeneous structures". In: *Pacific Journal of Mathematics* 327.1, pp. 83–105.

Hull, Michael e Denis Osin (2016). "Transitivity degrees of countable groups and acylindrical hyperbolicity". In: *Israel Journal of Mathematics* 216.1, pp. 307–353.

Bibliografia II

- Macpherson, H Dugald (1986). "Groups of automorphisms of $\aleph_0$-categorical structures". In: *The Quarterly Journal of Mathematics* 37.4, pp. 449–465.
- Melles, Garvin e Saharon Shelah (1994). "$\mathrm{Aut}(M)$ has a large dense free subgroup for saturated M". In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 26.4, pp. 339–344.
- Neumann, Peter M (1976). "The structure of finitary permutation groups". In: *Archiv der Mathematik* 27.1, pp. 3–17.

Definizioni di base su gruppi

Torna alla presentazione

Definizione (Gruppo di permutazioni)

Dato un insieme Ω, possiamo guardare all'insieme $\mathrm{Sym}(\Omega)$ di tutte le biezioni $\Omega \to \Omega$ (permutazioni). $\mathrm{Sym}(\Omega)$ forma un gruppo:

- la composizione è **associativa**: per ogni $g, h, k \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$;
- c'é un'**identità** 1: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$;
- esistono gli **inversi**: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ c'è $g^{-1} \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ tale che $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

Un **gruppo di permutazioni** $G \curvearrowright \Omega$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Sym}(\Omega)$ chiuso rispetto a composizione, inversi, e contenente l'identità.
Dati $a \in \Omega$, l'**orbita** di a (rispetto a G) è

$$\{b \in \Omega \mid \text{c'è } g \in G \text{ tale che } g(a) = b\}$$

Dato $B \subseteq \Omega$ lo **stabilizzatore** di B, G_B, sono gli elementi di G che fissano B (punto per punto).

Definizioni di base su gruppi

Torna alla presentazione

Definizione (Gruppo di permutazioni)

Dato un insieme Ω, possiamo guardare all'insieme $\mathrm{Sym}(\Omega)$ di tutte le biezioni $\Omega \to \Omega$ (permutazioni). $\mathrm{Sym}(\Omega)$ forma un gruppo:

- la composizione è **associativa**:
  per ogni $g, h, k \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$;
- c'é un'**identità** 1: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$;
- esistono gli **inversi**: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ c'è $g^{-1} \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ tale che $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

Un **gruppo di permutazioni** $G \curvearrowright \Omega$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Sym}(\Omega)$ chiuso rispetto a composizione, inversi, e contenente l'identità.
Dati $a \in \Omega$, l'**orbita** di a (rispetto a G) è

$$\{b \in \Omega \mid \text{c'è } g \in G \text{ tale che } g(a) = b\}$$

Dato $B \subseteq \Omega$ lo **stabilizzatore** di B, G_B, sono gli elementi di G che fissano B (punto per punto).

Definizioni di base su gruppi

Torna alla presentazione

Definizione (Gruppo di permutazioni)

Dato un insieme Ω, possiamo guardare all'insieme $\mathrm{Sym}(\Omega)$ di tutte le biezioni $\Omega \to \Omega$ (permutazioni). $\mathrm{Sym}(\Omega)$ forma un gruppo:

- la composizione è **associativa**:
  per ogni $g, h, k \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$;
- c'é un'**identità** 1: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$;
- esistono gli **inversi**: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ c'è $g^{-1} \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ tale che $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

Un **gruppo di permutazioni** $G \curvearrowright \Omega$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Sym}(\Omega)$ chiuso rispetto a composizione, inversi, e contenente l'identità.

Dati $a \in \Omega$, l'**orbita** di a (rispetto a G) è

$$\{b \in \Omega \mid \text{c'è } g \in G \text{ tale che } g(a) = b\}$$

Dato $B \subseteq \Omega$ lo **stabilizzatore** di B, G_B, sono gli elementi di G che fissano B (punto per punto).

Definizioni di base su gruppi

▸ Torna alla presentazione

Definizione (Gruppo di permutazioni)

Dato un insieme Ω, possiamo guardare all'insieme $\mathrm{Sym}(\Omega)$ di tutte le biezioni $\Omega \to \Omega$ (permutazioni). $\mathrm{Sym}(\Omega)$ forma un gruppo:

- la composizione è **associativa**:
  per ogni $g, h, k \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$;
- c'é un'**identità** 1: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$;
- esistono gli **inversi**: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ c'è $g^{-1} \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ tale che $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

Un **gruppo di permutazioni** $G \curvearrowright \Omega$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Sym}(\Omega)$ chiuso rispetto a composizione, inversi, e contenente l'identità.
Dati $a \in \Omega$, l'**orbita** di a (rispetto a G) è

$$\{b \in \Omega \mid \text{c'è } g \in G \text{ tale che } g(a) = b\}$$

Dato $B \subseteq \Omega$ lo **stabilizzatore** di B, G_B, sono gli elementi di G che fissano B (punto per punto).

Definizioni di base su gruppi

Torna alla presentazione

Definizione (Gruppo di permutazioni)

Dato un insieme Ω, possiamo guardare all'insieme $\mathrm{Sym}(\Omega)$ di tutte le biezioni $\Omega \to \Omega$ (permutazioni). $\mathrm{Sym}(\Omega)$ forma un gruppo:

- la composizione è **associativa**:
  per ogni $g, h, k \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$;
- c'é un'**identità** 1: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$, $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$;
- esistono gli **inversi**: per ogni $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ c'è $g^{-1} \in \mathrm{Sym}(\Omega)$
  tale che $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

Un **gruppo di permutazioni** $G \curvearrowright \Omega$ è un sottoinsieme di $\mathrm{Sym}(\Omega)$ chiuso rispetto a composizione, inversi, e contenente l'identità.
Dati $a \in \Omega$, l'**orbita** di a (rispetto a G) è

$$\{b \in \Omega \mid \text{c'è } g \in G \text{ tale che } g(a) = b\}$$

Dato $B \subseteq \Omega$ lo **stabilizzatore** di B, G_B, sono gli elementi di G che fissano B (punto per punto).

Altri risultati

Nella parola

$$w(x_1, \ldots, x_r) := \gamma_n x_{\iota(n)}^{\epsilon(n)} \gamma_{n-1} x_{\iota(n-1)}^{\epsilon(n-1)} \ldots \gamma_1 x_{\iota(1)}^{\epsilon(1)} \gamma_0 \ ,$$

γ_i è una **costante critica** se è fra due variabili che si cancellerebbero (ovvero, se $\iota(j-1) = \iota(j)$ ed $\epsilon(j-1) = -\epsilon(j)$).

Teorema (ess. de la Nuez Gonzalez, Ghadernezhad, Marimon e Pinsker 2026)

Sia $G \curvearrowright \Omega$ (Ω infinito) con chiusura algebrica localmente finita. Allora ogni identità mista con ***una*** *costante critica è singolare.*

Pensieri finali

- Dimostriamo anche che per $w(x_1, \ldots, x_r)$ non-singolare,
$$\{(g_1, \ldots, g_r) \in G^r \mid w(g_1, \ldots, g_r) \neq 1\}$$
è molto grande (comagro);
- (lavoro in corso): in generale, con n costanti critiche abbiamo bisogno di un Lemma di Neumann "a dimensione n", ottenendo nuove prove (cf. Bradford, Schneider e Thom 2023) che in spazi vettoriali e proiettivi di dimensione infinita, tutte le identità miste sono singolari.

Pensieri finali

- Dimostriamo anche che per $w(x_1, \ldots, x_r)$ non-singolare,
  $$\{(g_1, \ldots, g_r) \in G^r \mid w(g_1, \ldots, g_r) \neq 1\}$$
  è molto grande (comagro);
- (lavoro in corso): in generale, con n costanti critiche abbiamo bisogno di un Lemma di Neumann "a dimensione n", ottenendo nuove prove (cf. Bradford, Schneider e Thom 2023) che in spazi vettoriali e proiettivi di dimensione infinita, tutte le identità miste sono singolari.